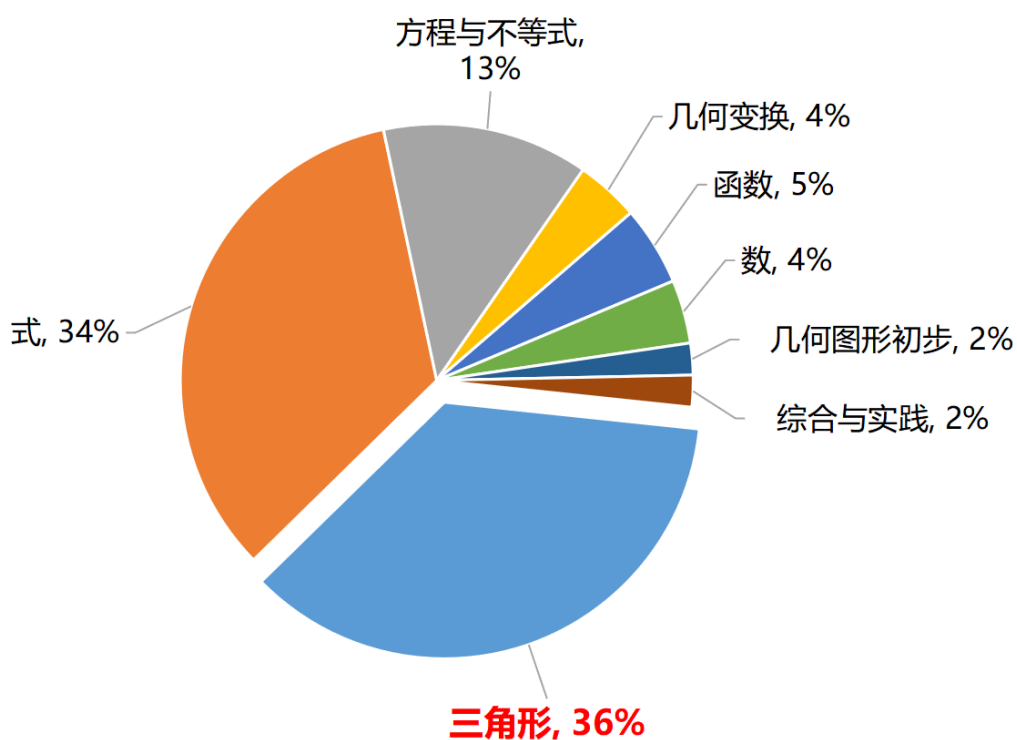


第1讲三垂直模型

本模块属于《全等三角形》的后续模块，重点包括全等的常见模型，综合性较强，本模块内容在考试常以压轴题的形式出现，需要帮学生建立一种基本题型的常规解法，遇到类似的题目能有思路、方向，也为旋转、相似等内容奠定基础。

本模块难度较高，适用于全等模型的专题学习，本模块分为三垂直模型、手拉手模型、半角模型和悬挂模型 3 讲内容，配套练习与讲义内容完全对照，帮助学生巩固各类题的解题技巧。

知己知彼

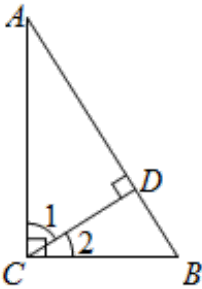
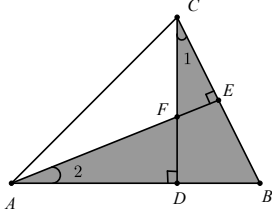


知识点	难度	考频
三垂直模型	★★★★	高
手拉手模型	★★★★	高
半角模型	★★★★	中
悬挂模型	★★★★	中

一、双垂直模型

锦囊妙计

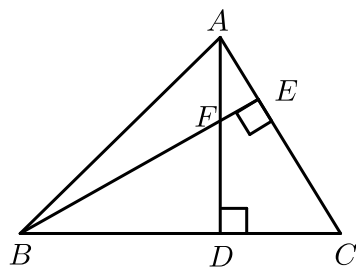
【经典图形】

双垂模型	八字模型
	
$\angle 1 = \angle B$ $\angle 2 = \angle A$	$\angle 2 + \angle FDA = \angle 1 + \angle CEF$ $\angle 1 = \angle 2$

【备注】双垂直模型并非全等模型，而是倒角模型，有两种思路
图一利用同角的余角相等进行倒角 图二利用八字模型倒角
利用推导后的等角再去证明全等三角形

栗子1

1. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 45^\circ$ ， F 是高 AD 和 BE 的交点， $CD = 4$ ，则线段 DF 的长度为（ ）。



A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

【答案】B

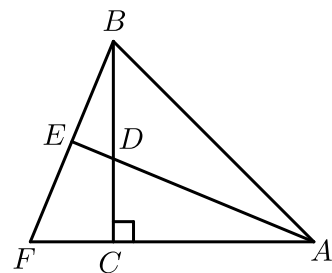
【解析】 $\because AD \perp BC$ ，
 $\therefore \angle ADB = 90^\circ$ ，
 $\because \angle ABC = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle ABD = \angle DAB$,
 $\therefore BD = AD$,
 $\therefore \angle CAD + \angle AFE = 90^\circ$, $\angle CAD + \angle C = 90^\circ$, $\angle AFE = \angle BFD$,
 $\therefore \angle AFE = \angle C$,
 $\therefore \angle AFE = \angle BFD$,
 $\therefore \angle C = \angle BFD$,
 在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle ADC$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle C = \angle BFD \\ AD = BD \\ \angle BDF = \angle ADC \end{cases}$$
 ,
 $\therefore \triangle BDF \cong \triangle ADC (\text{AAS})$,
 $\therefore DF = CD = 4$,
 故选B .

【标注】【知识点】AAS

2. 如图 , 在 $\triangle ABC$ 中 , $AC = BC$, $\angle ACB = 90^\circ$, AD 平分 $\angle BAC$, $BE \perp AD$, 交 AC 的延长线于 F , E 为垂足 . 则结论 : ① $AD = BF$; ② $AC + CD = AB$; ③ $BE = CF$; ④ $BF = 2BE$, 其中正确的结论是 _____ (填序号) .



【答案】①②④

【解析】 AD 平分 $\angle BAC$,
 $\therefore \angle BAE = \angle FAE$,
 $\therefore BE \perp AD$,
 $\therefore \angle AEB = \angle AEF = 90^\circ$,
 $\therefore \angle F + \angle FBC = 90^\circ$, $\angle F + \angle FAE = 90^\circ$,
 $\therefore \angle FBC = \angle FAE$,
 $\therefore \angle ACB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BCF = \angle ACB = \angle AEF = 90^\circ$,
 在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCF$ 中

$$\begin{cases} \angle ACD = \angle BCF \\ AC = BC \\ \angle FAE = \angle FBC \end{cases},$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCF$ (ASA),

$\therefore AD = BF, CD = CF,$

在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle AEF$ 中

$$\begin{cases} \angle BAE = \angle FAE \\ AE = AE \\ \angle AEB = \angle AEF \end{cases},$$

$\therefore \triangle AEB \cong \triangle AEF$ (ASA),

$\therefore AB = AF, BE = EF,$

$\therefore BF = 2BE.$

$\therefore CD \neq EF,$

$\therefore CF \neq BE,$

$\therefore AC + CF = AF,$

$\therefore AC + CD = AF,$

$\therefore AC + CD = AB,$

$\therefore$ 正确的有：①②④

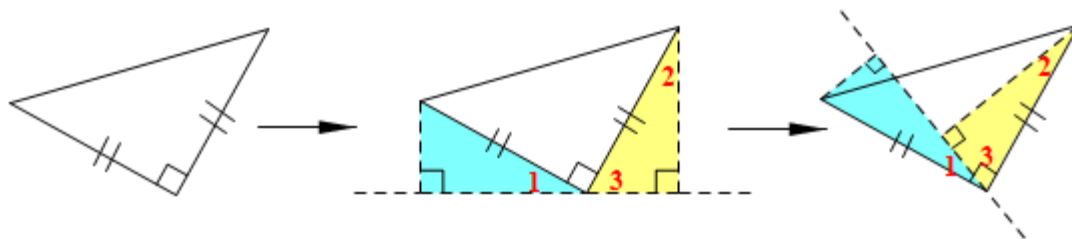
故答案为：①②④.

【标注】【知识点】ASA

二、一线三垂直模型

💡 锦囊妙计

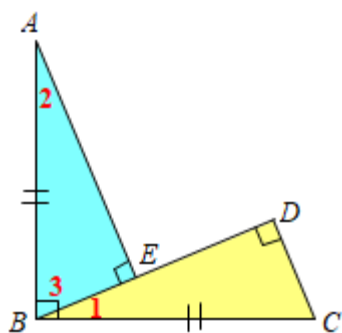
【经典图形】



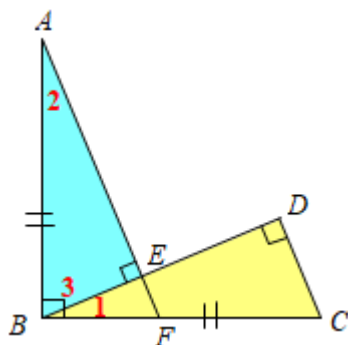
【核心考点】：

只要出现 等腰直角三角形，可以过 直角点 作一条直线，然后过 45°顶点 作该直线的垂线，构造三垂直模型

【变式图形】：



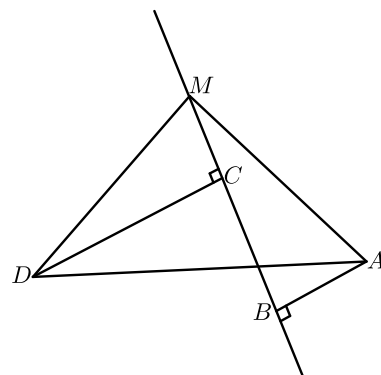
由 $\triangle ABE \cong \triangle BCD$ 得 $ED = AE - CD$



由 $\triangle ABE \cong \triangle BCD$ 得 $CF = AB - BF$

栗子2

3. 如图， $\triangle ADM$ 中， $AM = DM$ ， $\angle AMD = 90^\circ$ ，直线 l 经过点 M ， $AB \perp l$ ， $DC \perp l$ ，垂足分别为 B ， C ，若 $AB = 2$ ， $CD = 5$ ，则 BC 的长度为（ ）



- A. 1.5 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】 B

【解析】 $\because AB \perp l$ ， $DC \perp l$ ，

$$\therefore \angle DCM = \angle MBA = 90^\circ, \angle MDC + \angle DMC = 90^\circ,$$

$$\because \angle AMD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DMC + \angle AMB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MDC = \angle AMB,$$

在 $\triangle DMC$ 与 $\triangle MAB$ 中

$$\begin{cases} \angle DCM = \angle MBA \\ \angle MDC = \angle AMB \\ DM = AM \end{cases},$$

$\therefore \triangle DMC \cong \triangle MAB (\text{AAS}),$

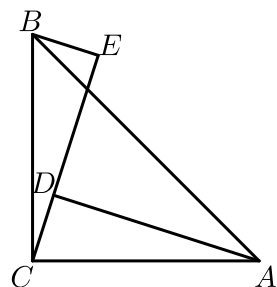
$\therefore AB = CM = 2, CD = BM = 5,$

$\therefore BC = BM - CM = 5 - 2 = 3.$

故选B.

【标注】【知识点】三垂直模型

4. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, $BE \perp CE$ 于 E , $AD \perp CE$ 于 D , $DE = 4\text{cm}$, $AD = 6\text{cm}$, 则 BE 的长是().



A. 2 cm

B. 1.5 cm

C. 1 cm

D. 3 cm

【答案】A

【解析】 $\because \angle DCA + \angle BCE = \angle ACB = 90^\circ$, $\angle DCA + \angle DAC = 90^\circ$,

$\therefore \angle DAC = \angle BCE$,

$\because AD \perp CE$, $BE \perp CE$,

$\therefore \angle ADC = \angle BEC = 90^\circ$,

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle CBE$ 中,

$$\therefore \begin{cases} \angle ADC = \angle CEB \\ \angle DAC = \angle ECB, \\ AC = CB \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBE (\text{AAS}),$

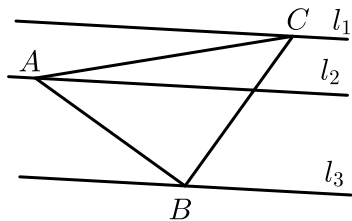
$\therefore CE = AD = 6\text{cm},$

$\therefore BE = CD = CE - DE = 6 - 4 = 2(\text{cm}).$

故选A.

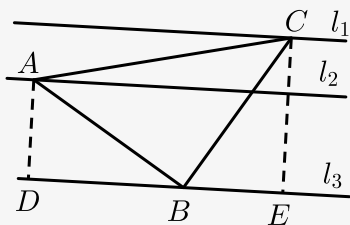
【标注】【知识点】三垂直模型

5. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC$, 三角形的顶点在相互平行的三条直线 l_1, l_2, l_3 上, 且 l_1, l_2 之间的距离为2, l_2, l_3 之间的距离为3, 则 $\triangle ABC$ 的面积是 _____ .



【答案】 17

【解析】 如图, 作 $AD \perp l_3$ 于 D , 作 $CE \perp l_3$ 于 E .



$$\because \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle CBE = 90^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle DAB + \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CBE,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCE$ 中,

$$\begin{cases} \angle BAD = \angle CBE \\ AB = BC \\ \angle ADB = \angle BEC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle BCE \text{ (ASA)},$$

$$\therefore BE = AD.$$

$$\because l_1, l_2 \text{ 之间的距离为 } 2, l_2, l_3 \text{ 之间的距离为 } 3,$$

$$\therefore BE = AD = 3, CE = 2 + 3 = 5.$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\text{梯形} ADEC} - S_{\triangle ADB} - S_{\triangle CBE}$$

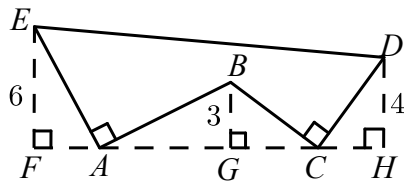
$$= \frac{1}{2} \times (3 + 5) \times 8 - \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times 2$$

$$= 32 - 15 = 17.$$

故答案为: 17.

【标注】 【知识点】 勾股定理与全等

6. 如图, $AE \perp AB$ 且 $AE = AB$, $BC \perp CD$ 且 $BC = CD$, 分别过点 E, B, D 作 AC 所在直线的垂线段, 垂足为 F, G, H , $EF = 6$, $BG = 3$, $DH = 4$, 则图中实线所围成的图形的面积 S _____.



【答案】 50

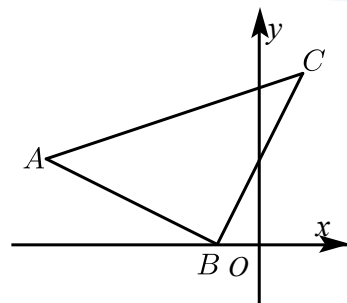
【解析】 $\because \angle EAF + \angle BAC = 90^\circ$, $\angle EAF + \angle AEF = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BAG = \angle AEF$,
 $\because$ 在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle BAG$ 中,

$$\begin{cases} \angle F = \angle AGB = 90^\circ \\ \angle AEF = \angle BAG \\ AE = AB \end{cases},$$
 $\therefore \triangle AEF \cong \triangle BAG (\text{AAS})$,
 同理 $\triangle BCG \cong \triangle CDH$,
 $\therefore AF = BG$, $AG = EF$,
 $GC = DH$, $BG = CH$,
 $\therefore$ 梯形 $DEFH$ 的面积 $= \frac{1}{2}(EF + DH) \cdot FH = 80$,
 $S_{\triangle AEF} = S_{\triangle ABG} = \frac{1}{2}AF \cdot AE = 9$,
 $S_{\triangle BCG} = S_{\triangle CDH} = \frac{1}{2}CH \cdot DH = 6$,
 $\therefore$ 图中实线所围成的图形的面积 $S = 80 - 2 \times 9 - 2 \times 6 = 50$.
 故答案为: 50.

【标注】【知识点】一线三等角模型

栗子4

7. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC$, 点 B 的坐标为 $(-1, 0)$, 点 C 的坐标为 $(1, 4)$, 则点 A 的坐标为 ().



A. (5, 2)

B. (4, 2)

C. (-5, 2)

D. (-4, 2)

【答案】 C

【解析】 过A作 $AF \perp x$ 轴于点F，过C作 $CD \perp x$ 轴于点D，

则构造了一线三垂直．

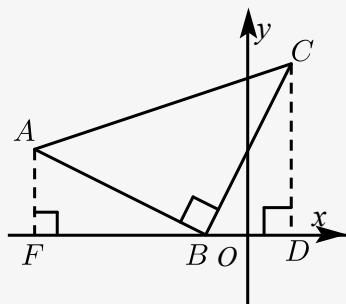
$\therefore \triangle ABF \cong \triangle BCD$ ，

$\therefore AF = BD = 2$ ， $BF = CD = 4$ ，

$\therefore OF = 4 + 1 = 5$ ，

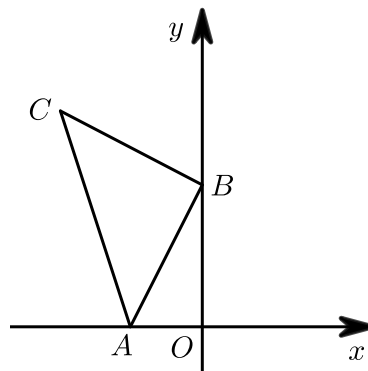
$\therefore A(-5, 2)$ ．

故选C．



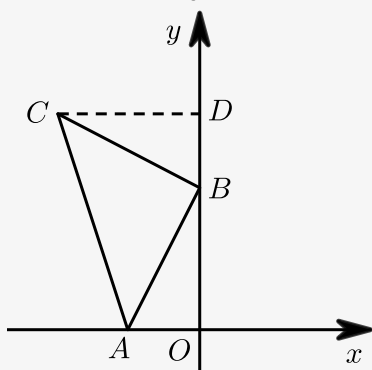
【标注】【知识点】三垂直模型

8. 如图， $A(m, 0)$ ， $B(0, n)$ ，以B点为直角顶点在第二象限作等腰直角 $\triangle ABC$ ，则C点的坐标为 _____．（用字母m、n表示）



【答案】 $(-n, n - m)$

【解析】 过点 C 作 $CD \perp y$ 轴于点 D ，如图所示，



$\because \triangle ABC$ 为等腰直角三角形，
 $\therefore \angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = BC$ ，
 $\because CD \perp BD$ ， $BO \perp AO$ ，
 $\therefore \angle CDB = \angle BOA = 90^\circ$ ，
 $\because \angle CBD + \angle ABO = 90^\circ$ ， $\angle CBD + \angle BCD = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle ABO = \angle BCD$ ，
在 $\triangle ABO$ 和 $\triangle BCD$ 中，
$$\begin{cases} \angle ABO = \angle BCD \\ \angle BOA = \angle CDB = 90^\circ \\ AB = BC \end{cases}$$

 $\therefore \triangle ABO \cong \triangle BCD (\text{AAS})$ ，
 $\therefore BD = AO$ ， $CD = BO$ ，
 $\therefore A(m, 0)$ ， $B(0, n)$ ，
 $\therefore BD = -m$ ， $CD = n$ ，
 $\therefore$ 点 C 的坐标为 $(-n, n - m)$ ，
故答案为： $(-n, n - m)$ 。

【标注】 【知识点】 等腰直角三角形与全等

栗子5

9. 已知， $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $BC = AB$ ， A 点在 x 轴负半轴上，直角顶点 B 在 y 轴上，点 C 在 x 轴上方。

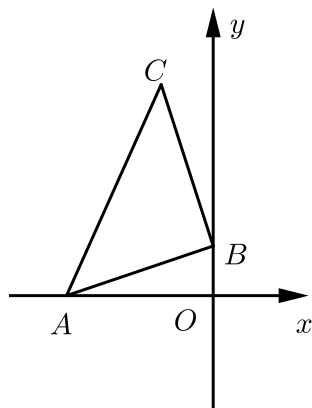


图 1

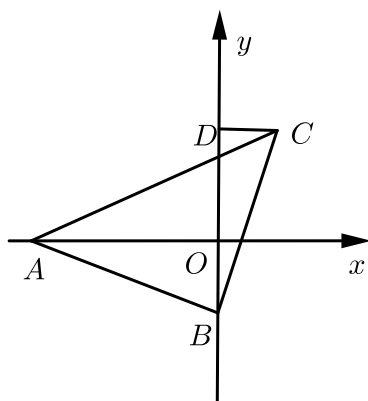


图 2

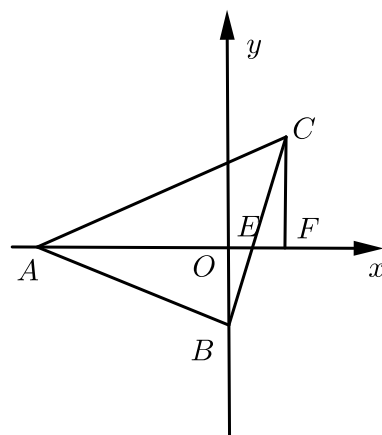


图 3

- (1) 如图1所示, 若 A 的坐标是 $(-3, 0)$, 点 B 的坐标是 $(0, 1)$, 求点 C 的坐标.
- (2) 如图2, 过点 C 作 $CD \perp y$ 轴于 D , 请写出线段 OA , OD , CD 之间等量关系.
- (3) 如图3, 若 x 轴恰好平分 $\angle BAC$, BC 与 x 轴交于点 E , 过点 C 作 $CF \perp x$ 轴于 F , 问 CF 与 AE 有怎样的数量关系? 并说明理由.

【答案】 (1) $C(-1, 4)$.

(2) $OA = OD + CD$.

(3) $AE = 2CF$.

【解析】 (1) 过 C 作 $CK \perp y$ 轴于 K ,

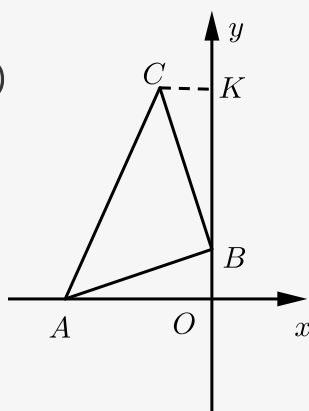
三垂直全等 $\triangle AOB \cong \triangle BKC$ (AAS)

,

$\therefore CK = OB = 1, BK = AO = 3$

,

$\therefore C(-1, 4)$.



(2) 三垂直全等为 $\triangle AOB \cong \triangle CDB$ (AAS),

$\therefore CD = OB, OA = BD$,

则 $OA = OD + CD$.

(3) 延长 CF 交 AB 延长线于点 K ,

$\because x$ 轴平分 $\angle CAB$,

$\therefore \triangle CAF \cong \triangle KAF$ (ASA),

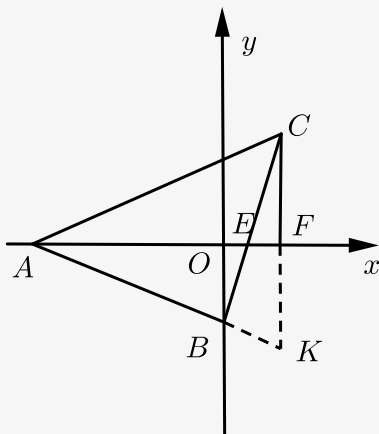
$\therefore CF = \frac{1}{2}CK$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CBK$ 中,

$$\begin{cases} \angle AEB = \angle K \\ \angle ABE = \angle KBC = 90^\circ, \\ AB = BC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBK (\text{AAS}),$

$\therefore AE = CK = 2CF.$



【标注】【知识点】三垂直模型

10. 如图1, $OA = 2$, $OB = 4$, 以A点为顶点, AB 为腰在第三象限作等腰直角 $\triangle ABC$.

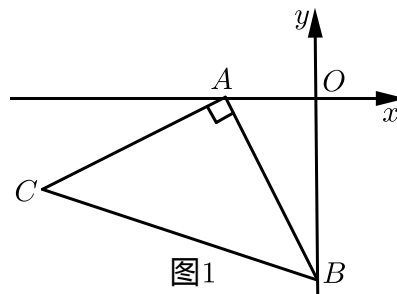


图1

(1) 求C点的坐标.

(2) 如图2, $OA = 2$, P 为y轴负半轴上的一个动点, 若以P为直角顶点, PA 为腰作等腰直角 $\triangle APD$, 过D作 $DE \perp x$ 轴于E点, 求 $OP - DE$ 的值.

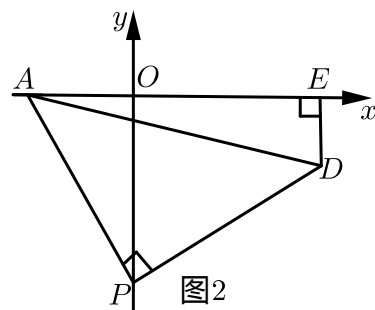
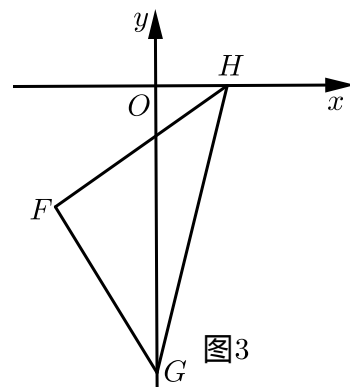


图2

(3) 如图3, 点F坐标为 $(-4, -4)$, 点G $(0, m)$ 在y轴负半轴, 点H $(n, 0)$ 在x轴的正半轴, 且 $FH \perp FG$, 求 $m + n$ 的值.

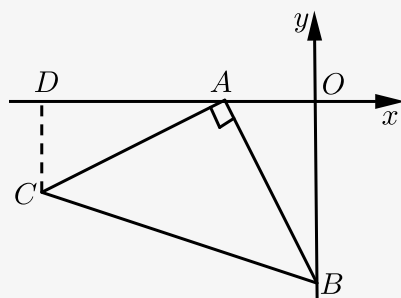


【答案】(1) $(-6, -2)$.

(2) 2.

(3) -8.

【解析】(1) 如图,



作 $CD \perp AD$,

$\because \angle CAD + \angle ACD = 90^\circ$, $\angle CAD + \angle OAB = 90^\circ$,

$\therefore \angle ACD = \angle OAB$,

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BAO$ 中,

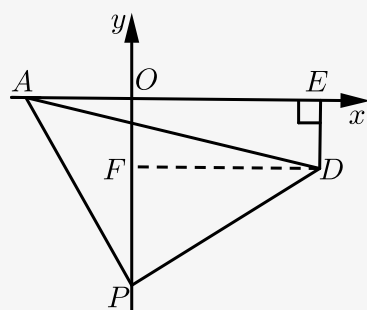
$$\begin{cases} \angle ADC = \angle AOB \\ \angle ACD = \angle OAB, \\ AC = AB \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BAO (\text{AAS})$,

$\therefore AD = OB$, $CD = OA$,

$\therefore$ 点 C 坐标为 $(-6, -2)$.

(2) 作 $DF \perp OP$,



$$\because \angle APO + \angle DPF = 90^\circ, \angle PDF + \angle DPF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APO = \angle PDF,$$

在 $\triangle AOP$ 和 $\triangle PFD$ 中,

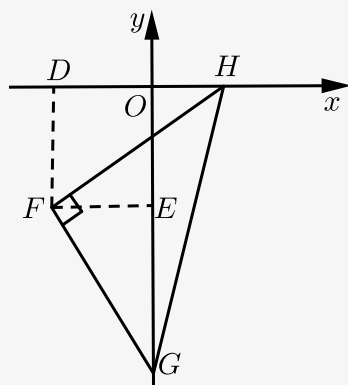
$$\begin{cases} \angle AOP = \angle PFD = 90^\circ \\ \angle APO = \angle PDF \\ AP = PD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOP \cong \triangle PFD (\text{AAS}),$$

$$\therefore AO = PF, DE = OF,$$

$$\therefore OP - DE = OP - OF = FP = AO = 2.$$

(3) 作 $FD \perp HD$, $FE \perp OG$,



$$\text{则 } FE = FD = 4,$$

$$\because \angle EFG + \angle OFE = 90^\circ, \angle OFE + \angle DFH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EFG = \angle DFH,$$

在 $\triangle EFG$ 和 $\triangle DFH$ 中,

$$\begin{cases} \angle EFG = \angle DFH \\ EF = DF \\ \angle FDH = \angle FEG \end{cases},$$

$$\therefore \triangle EFG \cong \triangle DFH (\text{ASA}),$$

$$\therefore EG = DH, \text{ 即 } -m - 4 = n + 4,$$

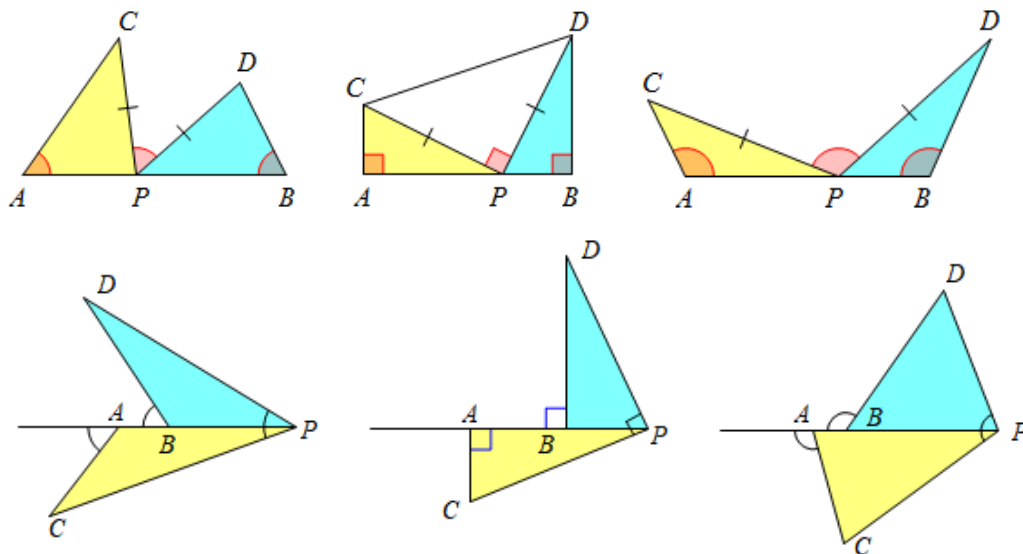
$$\therefore m + n = -8.$$

【标注】【知识点】等腰直角三角形与全等

三、一线三等角模型

 锦囊妙计

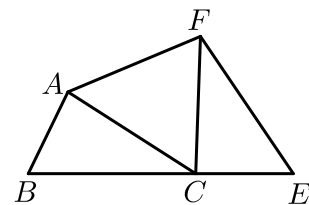
【经典图形】：



【核心考点】：只要在一条直线上出现 三个角 相等，一般都可以构造全等三角形解决问题。

栗子6

11. 如图，点 B, C, E 在同一条直线上， $\angle B = \angle E = \angle ACF = 60^\circ$ ， $AB = CE$ ，则与线段 BC 相等的线段是（ ）。



A. AC

B. AF

C. CF

D. EF

【答案】 D

【解析】 $\because \angle B = \angle E = \angle ACF = 60^\circ$,

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - 60^\circ - \angle ACB = 120^\circ - \angle ACB,$$

$$\angle ECF = 180^\circ - 60^\circ - \angle ACB = 120^\circ - \angle ACB,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ECF,$$

在 $\triangle BAC$ 和 $\triangle ECF$ 中，

$$\begin{cases} \angle BAC = \angle ECF \\ AB = CE \\ \angle B = \angle E \end{cases},$$

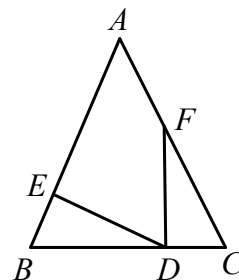
$$\therefore \triangle BAC \cong \triangle ECF (\text{ASA}),$$

$$\therefore BC = EF.$$

故选 D.

【标注】 【知识点】 一线三等角模型

12. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中，点 D 为 BC 上一点， E 、 F 两点分别在边 AB 、 AC 上，若 $BE = CD$ ， $BD = CF$ ， $\angle B = \angle C$ ， $\angle A = 50^\circ$ ，则 $\angle EDF = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$ 。



【答案】 65

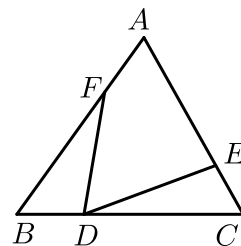
【解析】 $\because \angle B = \angle C$ ， $\angle A = 50^\circ$ ，
 $\therefore \angle B = \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 65^\circ$ ，
 在 $\triangle BED$ 和 $\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases} BE = CD \\ \angle B = \angle C \\ BD = CF \end{cases}$$

 $\therefore \triangle BED \cong \triangle CDF (\text{SAS})$ ，
 $\therefore \angle BED = \angle CDF$ ，
 $\therefore \angle EDF = 180^\circ - \angle EDB - \angle CDF$ ，
 $\angle B = 180^\circ - \angle BED - \angle EDB$ ，
 $\therefore \angle EDF = \angle B = 65^\circ$ 。

【标注】【知识点】一线三等角模型

13. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = \angle ACB$ ， D 为 BC 上的一点， $BF = CD$ ， $CE = BD$ ，则 $\angle EDF$ 等于（ ）。



- A. $90^\circ - \angle A$ B. $90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$ C. $180^\circ - \angle A$ D. $45^\circ - \frac{1}{2}\angle A$

【答案】 B

【解析】 $\because \angle B = \angle C$,

又 $BF = CD$, $CE = BD$,

$\therefore \triangle BDF \cong \triangle CED (\text{SAS})$,

$\therefore \angle BFD = \angle CDE$,

$\therefore \angle EDF = 180^\circ - \angle CDE - \angle BDF$

$= 180^\circ - \angle BFD - \angle BDF = \angle B$,

$\therefore \angle B = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$,

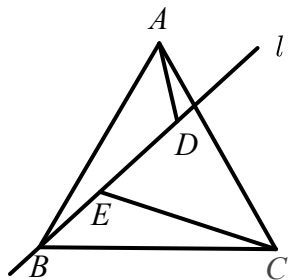
$\therefore \angle EDF = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$.

故选：B.

【标注】【知识点】一线三等角模型

栗子7

14. 如图，直线 l 经过等边三角形 ABC 的顶点 B ，在 l 上取点 D 、 E ，使 $\angle ADB = \angle CEB = 120^\circ$ 。若 $AD = 2\text{cm}$ ， $CE = 5\text{cm}$ ，则 $DE = \underline{\quad\quad} \text{cm}$ 。



【答案】3

【解析】如图， $\because \triangle ABC$ 为等边三角形，

$\therefore AB = BC$,

$\angle ABC = 60^\circ$,

即 $\angle ABD + \angle EBC = 60^\circ$,

$\because \angle ADB = 120^\circ$,

$\therefore \angle ABD + \angle BAD = 60^\circ$,

$\therefore \angle EBC = \angle BAD$,

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCE$ 中，

$$\begin{cases} \angle BDA = \angle BEC \\ \angle DAB = \angle EBC \\ AB = BC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle BCE$,

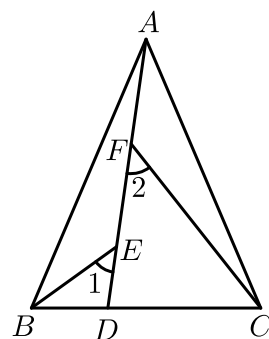
$$\therefore BD = CE = 5\text{cm} ,$$

$$BE = AD = 2\text{cm} ,$$

$$\therefore DE = 3\text{cm} .$$

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

15. 如图，在等腰三角形 ABC 中， $AB = AC$ ， $AB > BC$ ．点 D 在边 BC 上， $CD = 2BD$ ，点 E ， F 在线段 AD 上， $\angle 1 = \angle 2 = \angle BAC$ ．若 $\triangle ABC$ 的面积为9，则 $\triangle ABE$ 与 $\triangle CDF$ 的面积之和为 _____ ．



【答案】6

【解析】 $\because CD = 2BD$ ， $\therefore \triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 等高，底边比值为1 : 2，

$\therefore \triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 面积比为1 : 2，

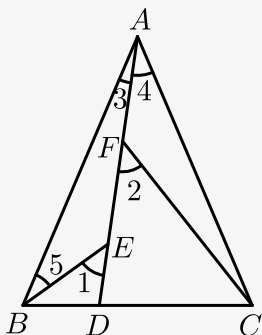
又 $\triangle ABC$ 的面积为9， $\therefore \triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 面积分别为3和6．

$\because \angle 1 = \angle 2 = \angle BAC$ ， $\therefore \angle AEB = \angle AFC$ ．

$\because \angle BAC = \angle 3 + \angle 4$ ， $\angle 1 = \angle 3 + \angle 5$ ， $\therefore \angle 4 = \angle 5$ ．

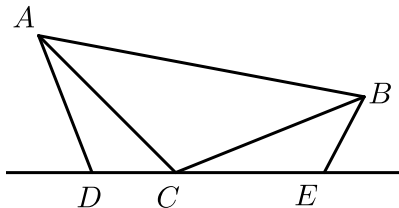
在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle CFA$ 中， $\begin{cases} \angle AEB = \angle AFC \\ \angle 5 = \angle 4 \\ AB = AC \end{cases}$ ， $\therefore \triangle AEB \cong \triangle CFA(\text{AAS})$ ．

$\therefore S_{\triangle AEB} = S_{\triangle CFA}$ ， $\therefore S_{\triangle ABE} + S_{\triangle CDF} = S_{\triangle CFA} + S_{\triangle CDF} = S_{\triangle ACD} = 6$ ．



【标注】【知识点】三角形的周长与面积问题

16. 如图, $AC = BC$, $\angle ADC = \angle ACB = \angle BEC = 120^\circ$, 且点 D 、 C 、 E 在同一条直线上. 求证: $DE = AD + BE$.



【答案】证明见解析.

【解析】 $\because \angle ADC = \angle ACB = \angle BEC = 120^\circ$,
 $\therefore \angle DAC + \angle ACD = 180^\circ - \angle ADC = 60^\circ$,
 $\angle ECB + \angle ACD = 180^\circ - \angle ACB = 60^\circ$,
 $\therefore \angle DAC + \angle ACD = \angle ECB + \angle ACD$,
 $\therefore \angle DAC = \angle ECB$,
 在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle CEB$ 中, $\begin{cases} \angle ADC = \angle CEB \\ \angle DAC = \angle ECB \\ AC = CB \end{cases}$,
 $\therefore \triangle ADC \cong \triangle CEB$ (AAS),
 $\therefore DC = BE, AD = CE$.
 $\therefore DE = DC + CE$,
 $\therefore DE = AD + BE$.

【标注】【知识点】一线三等角模型

17. 解答:

- (1) 如图1, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D 、 A 、 E 三点都在直线 m 上, 并且有 $\angle BDA = \angle AEC = \angle BAC = \alpha$, 其中 α 为任意锐角或钝角. 请问结论 $DE = BD + CE$ 是否成立? 若成立, 请你给出证明; 若不成立, 请说明理由.

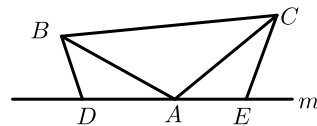


图1

- (2) D 、 E 是 D 、 A 、 E 三点所在直线 m 上的两动点 (D 、 A 、 E 三点互不重合), 点 F 为 $\angle BAC$ 平分线上的一点, 且 $\triangle ABF$ 和 $\triangle ACF$ 均为等边三角形, 连接 BD 、 CE , 若

$\angle BDA = \angle AEC = \angle BAC$ ，试判断 $\triangle DEF$ 的形状并说明理由．

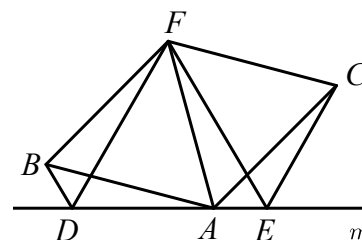


图2

【答案】 (1) 成立，证明见解析．

(2) $\triangle DEF$ 为等边三角形，证明见解析．

【解析】 (1) $\because \angle BDA = \angle BAC = \alpha$ ，

$\therefore$

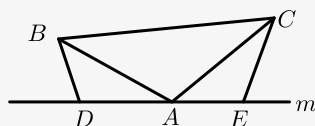


图1

$$\angle DBA + \angle BAD = \angle BAD + \angle CAE = 180^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle DBA = \angle CAE,$$

在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle CEA$ 中，

$$\begin{cases} \angle BDA = \angle CEA \\ \angle CAE = \angle ABD, \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADB \cong \triangle CEA (\text{AAS}),$$

$$\therefore AE = BD, AD = CE,$$

$$\therefore DE = AE + AD = BD + CE.$$

(2) 如图，

由(1)可知， $\triangle ADB \cong \triangle CEA$ ，

$$\therefore BD = AE, \angle DBA = \angle CAE.$$

$\because \triangle ABF$ 和 $\triangle ACF$ 均为等边三角形，

$$\therefore \angle ABF = \angle CAF = 60^\circ, BF = AF,$$

$$\therefore \angle DBA + \angle ABF = \angle CAE + \angle CAF,$$

$$\therefore \angle DBF = \angle FAE.$$

在 $\triangle DBF$ 和 $\triangle EAF$ 中，

$$\begin{cases} BD = AE \\ \angle DBF = \angle EAF, \\ BF = AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DBF \cong \triangle EAF (\text{SAS}),$$

$$\therefore DF = EF, \angle BFD = \angle AFE,$$

$$\therefore \angle DFE = \angle DFA + \angle AFE = \angle DFA + \angle BFD = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle DEF$ 为等边三角形 .

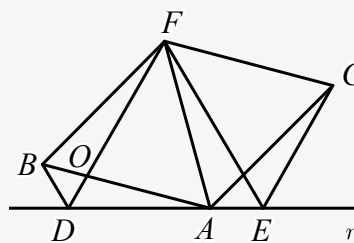


图2

【标注】【知识点】一线三等角模型